Ю.Г. Смирнов (Пенза)

Метод псевдодифференциальных уравнений в задачах дифракции электромагнитных волн на тонких экранах

1 Введение

Настоящая лекция посвящена аналитическому исследованию векторных задач дифракции стороннего электромагнитного поля на идеально проводящих тонких экранах. Эти задачи являются, по существу, классическими в электродинамике. Традиционная (физическая) теория дифракции создавалась на протяжении нескольких столетий Х. Гюйгенсом (1690), О. Френелем (1818), Г. Гельмгольцем (1859), Г. Р. Кирхгофом (1882), Д. Лармором (1903) и другими авторами. Однако благодаря работам А. Пуанкаре (1892) и А. Зоммерфельда (1896) стало ясно, что в задачах дифракции электромагнитных волн речь идет о некоторой краевой задаче математической физики. В общей постановке задача состоит в нахождении решений уравнений Максвелла, удовлетворяющих определенным краевым условиям. К этому надо добавить "условия излучения" (Зоммерфельд, 1912), состоящие в том, что вся энергия, излучаемая источником, должна уходить в бесконечность. Кроме того, следует учитывать особое поведение полей в окрестности края поверхности тонкого экрана. Первое аналитическое решение задачи дифракции на идеально проводящей полуплоскости было дано Зоммерфельдом [12]. Уже это решение позволило сделать ряд важных выводов о поведении электромагнитного поля в ближней и дальней зоне, об особенности полей в окрестности края тонкого экрана, о поведении полей на бесконечности и т.д.

Наиболее естественный подход к решению задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране – сведение ее к векторному интегродифференциальному уравнению на экране [40]. Такой подход часто называют методом поверхностных токов. Идея метода поверхностных токов принадлежит А. Пуанкаре (в акустических (скалярных) задачах этот метод разрабатывался Релеем (1897)). Впервые векторное интегродифференциальное уравнение на экране было получено А. Мауэ в 1949 году [45]. В наших обозначениях это уравнение имеет вид

$$Lu := grad_\tau\, A\,(div\, u) + k^2\, A_\tau u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где div – операция "поверхностной" дивергенции, A – интегральный оператор

$$Au = \int\limits_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\, ds, \tag{2}$$

u – касательное к поверхности экрана Ω векторное поле (плотность поверхностного тока). Индекс τ показывает взятие касательных компонент к Ω соответствующего векторного поля. Центральной проблемой при исследовании разрешимости уравнения (1) является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) этого уравнения в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все физически допустимые поля.

Изучение уравнения (1) было начато уже в работе А. Мауэ [45]. Позднее в фундаментальной монографии [40] была доказана теорема единственности для решений уравнения (1) (и краевой задачи дифракции), исследовано поведение дифракционных полей на бесконечности и в окрестности гладкого края экрана, получены аналитические решения задач дифракции на тонком диске и на сфере. Интересно отметить, что в случае плоского экрана авторы записали уравнение (1), используя преобразование Фурье, в виде уравнения, которое теперь называют псевдодифференциальным (сами авторы назвали его псевдоинтегральным).

Начиная с конца 40-х годов, Я. Н. Фельдом была опубликована серия работ [38, 39], посвященных задаче дифракции на тонкнм экране. В этих работах предпринята попытка построения теории разрешимости краевой задачи дифракции в пространстве $L_1(\Omega)$ ($u \in L_1(\Omega)$). Выбрать в качестве пространства решений уравнения (1) "традиционное" пространство $L_2(\Omega)$ нельзя, поскольку оно является слишком узким и не содержит решений с требуемой особенностью в окресности края экрана (особенность известна, например, из аналитического решения задачи дифракции на полуплоскости). В работах Я. Н. Фельда выбор пространств согласован с поведением полей в окрестности ребра, однако нет эффективного описания пространства образов оператора, определяемого левой частью уравнения (1).

После выхода в 1968 году монографии Р. Харрингтона [44] стали активно применяться численные методы (метод моментов, метод Галеркина) для решения задач дифракции на экранах различной формы, но без достаточного математического обоснования, которое отсутствует и в настоящее время. Не изучая свойства оператора L (фредгольмовость, вид главной части и т.д.), авторы ограничивались анализом внутренней (вычислительной) сходимости и сравнением результатов с аналитическими решениями. Поэтому некоторые эффекты, связанные со специфическими свойствами оператора L (о которых будет сказано ниже), были упущены.

Тем не менее в численных решениях задач дифракции на тонком экране был накоплен большой опыт. Имеется несколько монографий [3, 11, 44, 48, 60] по решению задач дифракции на экранах различной формы. Отметим также работы, сыгравшие важную роль в развитии численных методов решения задач дифракции на тонких экранах [4, 8, 46, 47, 54]. Не останавливаясь подробно на анализе численных методов, заметим, что при расчетах применялись, в основном, метод моментов, метод конечных элементов и метод Галеркина с выбором простейших базисных и пробных функций (некоторые авторы все эти методы рассматривают как модификации метода моментов). Современное состояние численных исследований подробно отражено в сборнике фундаментальных работ, опубликованных в период с 20-х по 90-е годы [42]. Следует однако подчеркнуть, что проблема эффективного численного решения задач дифракции на тонких экранах (в резонансном диапазоне частот, когда длина волны в пространстве сравнима с размерами экрана) в настоящее время, по-видимому, пока не решена даже с использованием самых мощных современных ЭВМ.

Особый класс составляют задачи дифракции на поверхностях вращения. При осесимметричном возбуждении стороннего электромагнитного поля они приводят к одномерным уравнениям. При несимметричном возбуждении осевая симметрия учитывается посредством разложения в ряд Фурье по азимутальной переменной решения и правой части уравнения (1). В результате подобной процедуры приходят к необходимости решения последовательности одномерных уравнений по образующей поверхности вращения. Аналитические исследования и численные решения задач дифракции на поверхностях вращения содержатся в работах [3, 10, 11, 55]. Однако анализ задач дифракции на поверхностях вращения в корне отличается от общего случая (дифракции на экране произвольной формы), поскольку изучаются, по существу, одномерные уравнения.

Г. А. Гринбергом [6, 7] для случая плоского экрана была предложена процедура перехода от векторного интегродифференциального уравнения (1) к векторному интегральному уравнению на экране. Метод включает в себя решение еще двух дополнительных краевых задач для уравнения Гельмгольца, причем одну из них – в общем виде [11]. С нашей точки зрения такой прием не упрощает задачи. Отметим, что каких-либо выводов о разрешимости задачи дифракции на плоском экране не было сделано.

Помимо попыток строгого решения уравнения (1) для анализа задач дифракции на тонком экране было предложено несколько различных подходов приближенного решения. В частности, активно развивались асимптотические методы [1, 2, 37]. Не вдаваясь в подробное обсуждение асимптотических методов решения задач дифракции на незамкнутых поверхностях, укажем только их общий недостаток. До сих пор не решен вопрос о точности асимптотического решения и границах его применимости. С особой остротой этот вопрос встает в резонансной области частот, когда характерные размеры поверхности сравнимы с длиной возбуждаемой электромагнитной волны.

Таким образом, в математической теории дифракции сложилась ситуация, когда для решения задач используется большое количество приближенных, численных методов, известны некоторые аналитические решения задач дифракции на простейших поверхностях, исследованы частные случаи (поверхности вращения), в то время как общей теории разрешимости не было построено. Здесь под теорией разрешимости мы понимаем результаты, аналогичные классической теории потенциала, то есть теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи и уравнения на экране (в подходящих пространствах), теоремы о представимости решения краевой задачи в виде векторного потенциала, теоремы о "скачках" предельных значений и т.д.

Существует два класса задач, наиболее близких к задачам дифракции электромагнитных волн на тонких экранах. Это (векторные) задачи дифракции электромагнитных волн на замкнутых идеально проводящих поверхностях и (скалярные) задачи дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях.

Первый класс задач отличается от рассматриваемых в настоящей работе задач тем, что изучается дифракция на замкнутых поверхностях. Векторный характер задач сохраняется, исследуются краевые задачи для системы уравнений Максвелла. Общая теория разрешимости электромагнитных задач дифракции на замкнутых поверхностях была построена уже к концу 60-х годов. К. Мюллер [50] смог довести до определенной завершенности эту теорию, доказав теоремы существовании и единственности. Благодаря этому теория дифракции электромагнитных волн на замкнутых поверхностях по своей внутренней замкнутости стала сравнимой с теорией потенциала. Современное изложение теории разрешимости для этого класса задач имеется в монографии Д. Колтона и Р. Кресса [17]. Доказательство разрешимости краевой задачи основано на сведении ее к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода по поверхности и опирается на теорему о "скачке" соответствующего векторного потенциала [17]. Уравнение рассматривается в классах Гельдера. К сожалению эта техника неприменима при исследовании задач дифракции на незамкнутых поверхностях, поскольку по теореме "о скачке" векторный потенциал будет принимать различные значения с разных сторон Ω, что противоречит непрерывности поля. Поэтому для незамкнутых поверхностей можно получить только уравнение 1-го рода (по традиционной терминологии). Уравнения 1-го рода на замкнутых поверхностях кратко рассматривались в [17], однако их разрешимость устанавливалась сведением к уже изученному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Второй класс составляют задачи дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях. Несмотря на то, что эти задачи скалярные, в них проявляется специфика задач на многообразиях с краем. Теория разрешимости для этого круга задач была построена недавно в работах [51, 52, 58, 59] (аналогичная теория для акустических задач дифракции на замкнутых поверхностях известна давно [18, 19]; ее современное изложение имеется в работах [26, 43, 53]). Основным инструментом, позволяющим добиться прогресса в изучении задач дифракции акустических волн на незамкнутых поверхностях, стала техника исследования псевдодифференциальных операторов (ПДО), действующих в пространствах Соболева.

К настоящему времени общая теория псевдодифференциальных операторов разработана достаточно полно и изложена в работах Ю.В. Егорова и М.А. Шубина [9, 41], М. Тейлора [35], С. Ремпеля и Б. Шульце [25] и других авторов. Первое систематическое использование этой теории в задачах дифракции, повидимому, начал В. Вендланд [59]. Им были рассмотрены двумерные скалярные задачи дифракции на тонких экранах и развита соответствующая теория разрешимости этих задач. Позднее Э. Стефан [58] обобщил результаты на случай ограниченных экранов в R^3 с гладким краем. Отметим, что в рамках теории ПДО для скалярных задач этот переход осуществляется сравнительно легко. Далее в работе [52] были рассмотрены экраны с угловыми точками и получены (численным методом) порядки сингулярности решений в окрестности этих точек, а также введены и описаны весовые классы Соболева для самих решений.

При решении задач дифракции на незамкнутых поверхностях мы будем использовать технику исследования ПДО на многообразиях с краем, действующих в сечениях векторных расслоений над Ω. При этом будут специально выбраны векторные пространства Соболева, отвечающие "физическим" требованиям задачи дифракции. Такой подход будем называть методом псевдодифференциальных уравнений.

Имеется еще ряд задач, которые также могут быть рассмотрены описываемым методом псевдодифференциальных уравнений. В частности, задача дифракции электромагнитного поля на отверстии в плоском, идеально проводящем экране. Эта задача является двойственной к задаче дифракции на плоском ограниченном экране и приводит к тому же векторному интегродифференциальному уравнению (1). Задача дифракции на частично экранированном магнитодиэлектрическом слое отличается от предыдущей наличием магнитодиэлектрического заполнения и дополнительной экранирующей идеально проводящей плоскости в одном из полупространств. Задача обычно решается с помощью введения функций Грина слоя для уравнения Гельмгольца. Основной трудностью здесь является постановка условий на бесконечности. Эти условия были сформулированы А. Г. Свешниковым [27] и П. Вернером [49], и носят название парциальных условий излучения Свешникова – Вернера. Задача дифракции на частично экранированном слое также сводится к решению уравнения на отверстии. Еще одна задача дифракции – о связи через отверстие полупространства с прямоугольным полубесконечным волноводом. В этой задаче уже недостаточно использования одной скалярной функции Грина для представления решения в цилиндрической области. Используется представление решения с помощью двух функций Грина со смешанными граничными условиями. На бесконечности применяются условия излучения Свешникова.

Последние три задачи принадлежат к классу задач о связи объемов через отверстие. Все они приводят к одному типу интегродифференциальных уравнений на отверстии. Теория разрешимости для этого круга задач также была построена методом псевдодифференциальных уравнений [61, 62].

Исследуем векторную задачу дифракции стороннего электромагнитного поля на системе ограниченных идеально проводящих экранов произвольной формы Ω. Основная идея изучения задачи заключается в переходе к анализу некоторого псевдодифференциального оператора на Ω. Поверхность $\overline{\Omega}$ естественным образом рассматривается как подмногообразие с краем некоторого объемлющего многообразия M с римановой метрикой. Используется техника исследования псевдодифференциальных операторов на многообразиях в пространствах Соболева сечений векторных расслоений, так как приходится иметь дело с пространствами касательных векторов, определенных в каждой точке поверхности, то есть с касательным расслоением. Пространства решений и образов (W и W') состоят из сечений векторных расслоений над Ω. Для анализа дифференциальных и псевдодифференциальных операторов на Ω используется исчисление символов ПДО, действующих в сечениях векторных расслоений [22, 25].

В параграфе 2 рассматривается квазиклассическая постановка задачи дифракции. Она отличается от общепринятой тем, что не конкретизируется поведение решений в окрестности ребер и угловых точек экрана, а ставится общее условие принадлежности рассеянного поля пространству $L^2_{loc}(\mathrm{R}^3)$ - условие конечности энергии в любом ограниченном объеме. Такой подход объясняется тем, что в дальнейшем будут изучаться обобщенные решения интегродифференциального уравнения на экране и постановка дополнительных условий на "ребре" будет излишне сужать пространство решений. В то же время нет необходимости рассматривать обобщенные решения во всем пространстве R^3, так как без труда доказывается, что рассеянное поле будет гладким всюду вне экрана и непрерывным вплоть до поверхности экрана с каждой стороны, исключая точки его границы. Такая постановка позволяет избежать ненужных усложнений, связанных с обобщенными решениями, при построении и анализе векторных потенциалов. Приводится теорема единственности для задачи дифракции.

В параграфе 3 вводятся векторные пространства распределений W и W', в которых будет изучаться интегродифференциальное уравнение на экране. Доказываются предложения, описывающие основные свойства этих пространств, наиболее важное из которых - разложение W в прямую сумму ортогональных подпространств W_1 и W_2 (для W' - W^1 и W^2), позволяющее в дальнейшем получить диагональное расщепление главной части ПДО и исследовать его свойства.

В параграфе 4 исследуется представление полей в виде векторного потенциала и выводится основное интегродифференциальное уравнение на экране. Решение задачи дифракции с помощью введения векторных потенциалов не только естественно и удобно с теоретической точки зрения, но и наиболее важно для приложений, поскольку именно этот путь чаще всего используются для получения практических численных результатов.

В параграфе 5 интегродифференциальное уравнение рассматривается как псевдодифференциальное. Особенностью этого уравнения является то, что главный (формально) матричный символ оказывается вырожденным, и поэтому изучение уравнения на декартовом произведении двух экземпляров некоторого пространства крайне неудобно. Обойти эту трудность удается рассматривая уравнение на "несимметричном" пространстве W, согласованном с квадратичной формой псевдодифференциального оператора. Определяется обобщенное решение $u \in W$ ПД уравнения.

Параграф 6 является центральным. Здесь производится диагональное расщепление главной части ПДО на подпространствах W_1 и W_2. Этот момент является ключевым при анализе свойств оператора. Рассматривая сужение ПДО на W_1 и W_2, выясняется структура полного символа оператора и доказывается фредгольмовость оператора с нулевым индексом в пространствах $W \to W'$. Значение этих результатов выходит далеко за рамки доказываемых ниже теорем о разрешимости уравнения. Знание структуры ПДО является очень важным при выборе численного метода решения ПД уравнения, базисных и пробных функций в методе Галеркина, при анализе сходимости численного алгоритма и т.д.

Одним из приложений полученных результатов является выяснение вопроса о гладкости обобщенных решений при гладких правых частях в ПД уравнении, который рассматривается в параграфе 7. Наиболее интересный для практических приложений вопрос - о порядке сингулярности решения ПД уравнения в окрестности границы и ее угловых точек. Основываясь на сведении общего векторного ПД уравнения к двум уравнениям вида $(1-\Delta)^{\mp 1/2} = f$, и используя результаты о решении таких уравнений в весовых классах Соболева [52], устанавливается величина порядка сингулярности решения в окрестности точек границы в векторной задаче.

В параграфе 8 изучается зависимость решений ПД уравнения и исходной задачи дифракции от параметра k. Доказывается справедливость принципа предельного поглощения.

В параграфе 9 рассматривается численный метод Галеркина для решения интегродифференциального уравнения на экране. Он основан на специальном выборе безроторных и бездивергентных базисных и тестовых функций. Представлена теорема о сходимости метода Галеркина. Видимо, эта теорема является пока единственным метематически строгим результатом о сходимости численного метода для решения уравнения на экране.

Результаты, изложенные в настоящей лекции, содержатся в работах [61, 62, 14, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34].

2 Постановка задачи дифракции. Теорема единственности

Пусть M - замкнутая связная ориентированная поверхность в R^3 класса C^∞. Пусть $\overline{\Omega} \subset M$,

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j, \quad \overline{\Omega}_i \bigcap \overline{\Omega}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

- объединение конечного числа связных ориентированных незамкнутых и непересекающихся поверхностей класса C^∞ в R^3. Край $\partial\Omega_j = \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup\limits_j \partial\Omega_j$.

Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в свободном пространстве с волновым числом k, $k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\sigma\omega^{-1})$, $Im\, k \geq 0$ $(k \neq 0)$, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$(3) \qquad E, H \in C^2\left(\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{M_+} \setminus \Gamma_\delta\right) \bigcap_{\delta>0} C\left(\overline{M_-} \setminus \Gamma_\delta\right),$$

удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$(4) \qquad \begin{aligned} Rot H &= -ikE, \\ Rot E &= \quad ikH, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

краевым условиям для касательных составляющих электрического поля на поверхности экрана

$$(5) \qquad E_\tau|_\Omega = -E^0_\tau|_\Omega$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$(6) \qquad E, H \in L^2_{loc}(\mathrm{R}^3)$$

и условиям на бесконечности

$$(7) \qquad E, H = o(r^{-1}), \quad r := |\mathrm{x}| \to \infty \text{ при } Im\, k > 0;$$

$$H \times e_r - E = o(r^{-1}), \quad E \times e_r + H = o(r^{-1}),$$

$$E, H = O(r^{-1}), \quad r \to \infty \text{ при } Im\, k = 0 \tag{8}$$

(условия Сильвера-Мюллера [17]). Здесь $e_r = \mathrm{x}/|\mathrm{x}|$, $\times$ - означает векторное произведение; $\Gamma_\delta := \{\mathrm{x} : |\mathrm{x} - y| < \delta\,, y \in \Gamma\}$. Электромагнитные поля гармонически зависят от времени (множитель $exp(-i\omega t)$ опущен), $\omega > 0$ - круговая частота, $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ - диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma \geq 0$ -проводимость среды. M_+ и M_- - соответственно внешность и внутренность поверхности M. Через ν будем обозначать единичный вектор внешней нормали к M. Для полного поля $E^{\text{полн}} = E^0 + E$, $H^{\text{полн.}} = H^0 + H$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\overline{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$

$$E^0 \in C^\infty(\Omega_\delta), \quad \Omega_\delta = \{\mathrm{x} : |\mathrm{x} - y| < \delta, y \in \Omega\} \tag{9}$$

откуда следует, что

$$E^0_\tau|_\Omega \in C^\infty(\overline{\Omega}) \tag{10}$$

Обычно падающее поле - это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь [2], расположенный вне $\overline{\Omega}$. В этих случаях условия (9),(10) выполнены. Поле E^0, H^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Определение 1 *Решение E, H задачи (4)-(8), удовлетворяющее условию (3), будем называть квазиклассическим.*

Такое название обусловлено тем, что, во-первых, как и в классической постановке, разыскивается гладкое, непрерывное вплоть до Ω (с каждой стороны) решение, а, во-вторых, в (3)-(8) не конкретизируется поведене решения в окрестности Γ , и ставится общее условие (6) (решение задачи не будет непрерывным вплоть до $\overline{\Omega}$; в окрестности Γ функции E, H имеют особенность). Часто условие (6) заменяют более жесткими условиями Мейкснера [21], указывая порядок особенности компонент поля в окрестности "ребра". Но в окрестности угловых точек границы Γ такие условия неизвестны (они будут обсуждаться в параграфе 7).

Условия (8) на бесконечности эквивалентны условиям Зоммерфельда ($Im\,k = 0$, $k \neq 0$)

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - ik\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = o(r^{-1}), \quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = O(r^{-1}), \quad r \to \infty,$$

которые иногда легче проверить. Доказательство этого утверждения имеется в [17]. Условия (7), (8), (11) выполняются равномерно по всем направлениям e_r.

Имеет место теорема единственности для задачи (3)-(8). Доказательство опирается на энергетическое тождество, получаемое с помощью леммы Лоренца. Однако обычно эта лемма устанавливается для гладких E, H [13], в то время как в нашем случае поля E, H будут иметь особенности в окрестности Г. Обобщение результатов на этот случай не совсем элементарно и представлено в [61, 62].

Теорема 1 *Задача (3)-(8) при $Im\,k \geq 0$, $k \neq 0$ имеет не более одного решения.*

3 Пространства W и W' сечений векторных расслоений над Ω

Пусть M - замкнутая связная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ класса C^∞ (замкнутая поверхность - это двумерное компактное многообразие без края). Пусть $\overline{\Omega} \subset M$ - подмногообразие с краем многообразия M, не обязательно связанное, с конечным числом компонент связности, каждая из которых имеет размерность два. Предполагаем, что край $\Gamma := \partial\Omega$ - кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения класса C^∞.

Обозначим через TM касательное расслоение над M со стандартным скалярным произведением в слое T_xM (касательной плоскости). Фиксируем $U = \{U_\alpha\}$ - конечное покрытие M координатными окрестностями, $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ - локальные карты и $\{\varphi_\alpha\}$ - подчиненное покрытию U разбиение единицы. Для всякого гладкого сечения $u \in C^\infty(M)$ расслоения TM введем функции [24]

$$u_\alpha = \varphi_\alpha u \in C_0^\infty(V_\alpha), \qquad u_\alpha = (u_\alpha^1, u_\alpha^2),$$

отождествляя множество U_α с его образом в R^2. Для скалярной функции $g \in C^\infty(M)$ полагаем $g_\alpha = \varphi_\alpha g$. Определим пространство Соболева $H^s(M)$ как пополнение $C^\infty(M)$ по норме $\|\cdot\|_s$ для любого $s \in \mathrm{R}$, где

$$\|u\|_s^2 = \sum_\alpha (\|u_\alpha^1\|_s^2 + \|u_\alpha^2\|_s^2), \quad \|g\|_s^2 = \sum_\alpha \|g_\alpha\|_s^2.$$

(Скалярное произведение и норма в $H^s(\mathrm{R}^2)$ определяется обычным образом

$$(u, v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = (u, u)_s; \quad \langle\xi\rangle := (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}.$$

Через $\widehat{u}$ обозначено преобразование Фурье распределения u. Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по R^2. В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u = (u^1, u^2)^T$, $v = (v^1, v^2)^T$ и т.д. . При этом в записи $u \in H^s$, H^s уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_s = (u^1, v^1)_s + (u^2, v^2)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{v}(\xi)}\, d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = \|u^1\|_s^2 + \|u^2\|_s^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств и в векторном случае.) Для другого покрытия, другого разбиения единицы и других карт получится эквивалентная норма. Таким образом пространство $H^s(M)$ определено корректно.

Положим для любого $s \in \mathrm{R}$ [25]

$$H^s(\Omega) := \left\{ u\big|_\Omega : u \in H^s(M) \right\},$$

$$\tilde{H}^s(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in H^s(M) : \ supp\, u \subset \overline{\Omega} \right\}.$$

Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$. Отметим, что обозначения для H^s в скалярном и в векторном случае совпадают, однако из контекста всегда ясно, о каком пространстве идет речь.

Определим операции "поверхностной дивергенции и градиента". Будем считать, что покрытие U и локальные карты выбраны так, что первая квадратичная форма поверхности $U = U_\alpha$ в локальных координатах имеет вид $dl^2 = G(x_1, x_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$; $G = G_\alpha$ (этого всегда можно добиться; см.[23, С.111]). Положим в каждой $U = U_\alpha$

$$div\, u = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial(u_1\sqrt{G})}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2\sqrt{G})}{\partial x_2}\right),$$

$$grad\, g = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}e_2\right).$$

Тогда для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$div\, u = \sum_\alpha div\, u_\alpha, \quad grad\, g = \sum_\alpha grad\, g_\alpha,$$

где $u_\alpha = \varphi_\alpha u$, $g_\alpha = \varphi_\alpha g$.

Далее, определим гильбертово пространство $W = W(\overline{\Omega})$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|div\, u\|_{-1/2}^2$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_W = (u, v)_{-1/2} + (div\, u,\ div\, v)_{-1/2}.$$

Пусть W_i есть замыкание по норме $\|\cdot\|_W$ W_i^0 $(i = 1, 2)$:

$$W_1 = \overline{W_1^0}, \text{ где } W_1^0 := \{u \in C_0^\infty(\Omega) : div\, u = 0\},$$

$$W_2 = \overline{W_2^0}, \text{ где } W_2^0 := \{u \in C_0^\infty(\Omega) : u = grad\, h, h \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Следующие Предложения описывают свойства пространства W [61, 62].

Предложение 1 *Пространство W разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств W_1 и W_2:*

$$W = W_1 \oplus W_2.$$

Предложение 2

$$W = \{u \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) : div\, u \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})\}.$$

Предложение 3 *Имеют место непрерывные вложения*

$$\tilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}) \subset W \subset \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$$

и оценки норм

$$\|u\|_{-1/2} \le \|u\|_W \le C_0\|u\|_{1/2}.$$

Кроме того,

$$\|u\|_W = \|u\|_{-1/2}$$

для $u \in W_1$,

$$C_1\|u\|_{1/2} \le \|u\|_W \le C_2\|u\|_{1/2}$$

для $u \in W_2$.

Введем операции, определяемые в локальных координатах в окрестности $U = U_\alpha$ следующим образом:

$$rot_\nu\, u = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial(u_2\sqrt{G})}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_1\sqrt{G})}{\partial x_2}\right);$$

$$grad' g = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}e_1 - \frac{\partial g}{\partial x_1}e_2\right);$$

в общем случае для $u = \sum\limits_\alpha u_\alpha$, $g = \sum\limits_\alpha g_\alpha$

$$rot_\nu\, u = \sum_\alpha rot_\nu\, u_\alpha,$$

$$grad'\, g = \sum_\alpha grad'\, g_\alpha.$$

Рассмотрим разложение $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$, более подробно. Всякий элемент $u \in C_0^\infty(\Omega)$ представим в виде

$$u = (1 - P)u + Pu = grad'\, g + grad\, h =$$

$$grad'\Delta^{-1}(rot_\nu\, u) + grad\,\Delta^{-1}(div\, u);$$

Действие проекторов P и $1-P$ на всем W доопределяется до непрерывности. Очевидно, что

$$div\, grad'\, g \equiv 0; \quad rot_\nu\, grad\, h \equiv 0.$$

Ниже используются две формулы, являющиеся следствием общей формулы Стокса [23]:

$$\int_M u \cdot grad\, b\, ds = -\int_M (div\, u) b\, ds, \tag{12}$$

$$\int_M u \cdot grad' b\, ds = -\int_M (rot_\nu\, u) b\, ds; \tag{13}$$

$$u, b \in C^\infty(M).$$

Формулы (12), (13) могут быть получены с помощью перехода к локальным координатам.

Следующие Предложения описывают свойства пространства $W' = (W(\overline{\Omega}))'$ - антидвойственного к W [61, 62].

Предложение 4

$$W' = \left\{ f\big|_\Omega : f \in H^{-1/2}(M),\ rot_\nu\, f \in H^{-1/2}(M) \right\};$$

$$H^{1/2}(\Omega) \subset W' \subset H^{-1/2}(\Omega).$$

Замечание 1 $C^\infty(\overline{\Omega})$ *плотно в* W'.

Предложение 5 *Пространство* W' *разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств*

$$W' = W^1 \oplus W^2 \text{ , где}$$

$$W^1 := \{ f \in W' : div\, f = 0 \},$$

$$W^2 := \{ f \in W' : rot_\nu\, f = 0 \}.$$

Отметим, что все результаты параграфа 3 остаются в силе, если вместо подмногообразия с краем $\overline{\Omega}$ рассматривать многообразие без края M.

4 Представление решений и система интегродифференциальных уравнений на экранах

Будем искать решение задачи (3) - (8) в виде векторного потенциала

(14) $$E = ik^{-1}\left(Grad\, Div\,(A_1 u) + k^2 A_1 u\right),$$

(15) $$H = Rot\,(A_1 u),$$

(16) $$A_1 u = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\, ds; \quad x = (x_1, x_2, x_3) \notin \overline{\Omega}.$$

Здесь $u(y)$ - касательное векторное поле, заданное на Ω; $u(y)\cdot\nu(y) = 0$ для всех $y \in \Omega$, где $\nu(y)$ - единичный вектор нормали к Ω в точке y. Физический смысл u - плотность поверхностного тока на Ω.

Будем предполагать, что u удовлетворяет условиям

(17) $$u \in W(\overline{\Omega}),$$

(18) $$u,\, div\, u \in C^1(\Omega).$$

Переходя к локальным координатам, нетрудно доказать, что

$$A_1 u \in C^\infty(\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}).$$

Как показано в [43] оператор A_1 действует непрерывно в пространствах

$$A_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \to H^1_{loc}(\mathrm{R}^3).$$

Нетрудно доказать, что

$$Div\,(A_1 u) = A_1(div\, u), \quad x \notin \overline{\Omega}, \quad u \in W.$$

Это равенство достаточно доказать для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$, в силу плотности этого множества в W и в $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$. При этом будем иметь $A_1(div\, u) \in H^1_{loc}(\mathrm{R}^3)$.

Если u удовлетворяет условиям (17),(18), то (14) эквивалентно

(19) $$E = ik^{-1}\left(Grad\, A_1(div\, u) + k^2 A_1 u\right), \quad x \in \mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}.$$

Поля $E, H \in C^\infty(\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$, определяемые по формулам (14),(15) (или (19)), удовлетворяют уравнениям Максвелла (4) в $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ и условиям на бесконечности (7), (8) (или (11)). Это сразу следует из свойств ядра в интегральном представлении (16) и выбора E, H в виде (14), (15).

Имеют место утверждения, для предельных значений E и H, когда точка x опускается на Ω. Пусть $x \in \Omega$. Тогда касательные компоненты поля E и нормальная компонента поля H непрерывны вплоть до Ω (искючая точки края Γ). Точнее,

$$\lim_{t \to 0} \nu(x) \times E(x + \nu(x)t) = \nu(x) \times E^{(0)}(x),$$

$$\lim_{t \to 0} \nu(x) \cdot H(x + \nu(x)t) = \nu(x) \cdot H^{(0)}(x); \quad x \in \Omega.$$

Для нормальной компоненты поля E и касательных компонент поля H имеем формулы

$$(20) \quad \lim_{t \to \pm 0} \nu(x) \cdot E(x + \nu(x)t) = \mp \frac{i}{2k} div\, u(x) + \nu(x) \cdot E^{(0)}(x),$$

$$(21) \lim_{t \to \pm 0} \nu(x) \times H(x + \nu(x)t) = \pm \frac{1}{2} u(x) + \nu(x) \times H^{(0)}(x); \;\; x \in \Omega,$$

где

$$E^{(0)}(x) =$$

$$\frac{i}{4\pi k} \left(\int\limits_\Omega Grad_{\mathrm{x}} \left(\frac{e^{ik|\mathrm{x}-y|}}{|\mathrm{x}-y|} div\, u(y) \right)_{\mathrm{x}=x} ds + k^2 \int\limits_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\, ds \right);$$

$$H^{(0)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega Rot_{\mathrm{x}} \left(\frac{e^{ik|\mathrm{x}-y|}}{|\mathrm{x}-y|} u(y) \right)_{\mathrm{x}=x} ds,$$

а сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Из (21) получаем

$$(22) \qquad u(x) = [\nu(x) \times H(\mathrm{x})]_\Omega, \quad x \in \Omega,$$

где $[\,\cdot\,]_\Omega$ означает разность предельных значений при $t \to +0$ и $t \to -0$, $\mathrm{x} = x + \nu(x)t$, в точках $x \in \Omega$. Эта формула объясняет физический смысл u.

Доопределим касательные составляющие поля H и нормальную компоненту поля E с каждой стороны Ω по формулам (20), (21). Тогда E, H будут непрерывны (с каждой стороны) в точках Ω и условие (3) выполняется. Краевое условие (5) приводит к интегродифференциальному уравнению для u. Опуская точку x на Ω, из (8) и (19) , будем иметь

$$(23) \qquad grad_\tau\, A(div\, u) + k^2 A_\tau u = f; \quad x \in \Omega,$$

$$(24) \qquad Au = \int_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\, ds, \quad A_\tau u := (Au)_\tau,$$

$$(25) \qquad f = 4\pi ik E_\tau^0\big|_\Omega; \quad f \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Как было показано выше

$$(26) \qquad A_1 u \in H^1_{loc}(\mathrm{R}^3), \quad u \in \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$$

Тогда из (15), (19), (16) находим, что $E, H \in L^2_{loc}(\mathrm{R}^3)$ при $u \in W$ и условие (6) конечности энергии в любом ограниченном объеме также выполнено.

Таким образом, если u является решением (23) и удовлетворяет условиям (17), (18), то формулы (14) - (16) (или (19)) дают квазиклассическое решение задачи (3) - (8) на Ω. Кроме того, если u нетривиальное решение, то, в силу (22), E, H - также нетривиальное решение (3) - (8). Тогда из теоремы единственности следует

Теорема 2 *Уравнение (23) имеет не более одного решения, удовлетворяющего условиям (17), (18).*

В следующих параграфах будет доказано, что при $Im\, k \geq 0$, $r \neq 0$ уравнение (23) всегда разрешимо. Поэтому формулы (14) - (16), (19) дают (единственное) решение задачи (3)-(8). Тем самым будет установлено, что всякое решение (3)-(8) представимо в виде векторного потенциала.

5 Сведение задачи к векторному псевдодифференциальному уравнению на Ω

Рассмотрим ядро интегрального оператора (24). Фиксируем α, $U = U_\alpha$, $V = V_\alpha$. Пусть $\chi^{-1} : V \to U$, $\mathrm{x} = \chi^{-1}(x) \in U$, $x = (x_1, x_2) \in V$ - локальные координаты на U; $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$. Имеем

$$|\mathrm{x} - y| = |\chi^{-1}(x) - \chi^{-1}(x_0)| = \Phi(x, x_0)|x - x_0|,$$

где $\Phi(x, x_0) \in C^\infty(V \times V)$ (так как поверхность U класса C^∞) и $\Phi(x, x_0) > 0$ при $x, x_0 \in V$; кроме того $\Phi(x, x_0) = \Phi(x_0, x)$. Далее,

$$\Phi(x, x_0) = \Theta(x_0) + \Pi(x, x_0), \quad \Theta(x_0) := \Phi(x_0, x_0), \quad \Pi \in C^\infty(V \times V),$$

причем $\Pi(x_0, x_0) = 0$ при $x_0 \in V$. Тогда

$$\frac{e^{ik|\mathrm{x}-y|}}{|\mathrm{x} - y|} = \frac{e^{ik\Phi(x,x_0)|x-x_0|}}{\Phi(x, x_0)|x - x_0|} =$$

$$= \frac{e^{-|x-x_0|}}{\Theta(x_0)|x - x_0|} + e^{-|x-x_0|}\frac{\Pi_1(x, x_0)}{|x - x_0|} + |x - x_0|\Phi_1(x, x_0) + \Phi_2(x, x_0),$$

где $\Pi_1, \Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty(V \times V)$, $\Pi_1(x_0, x_0) = 0$ при $x_0 \in V$.

Дифференциал площади на поверхности U представим в виде

$$ds = G(x)\,dx,\ G(x) = G(x_0) + Q(x, x_0),\ G \in C^\infty(V),\ Q \in C^\infty(V \times V);$$

$Q(x, x_0) := G(x) - G(x_0)$ и $Q(x_0, x_0) = 0$ при $x_0 \in V$.

Объединяя все формулы можно записать

$$\frac{e^{ik\Phi(x,x_0)|x-x_0|}}{\Phi(x, x_0)|x - x_0|}G(x) = \tag{27}$$

$$= \frac{G(x_0)e^{-|x-x_0|}}{\Theta(x_0)|x - x_0|} + \frac{B(x_0)\cdot(x - x_0)}{|x - x_0|}e^{-|x-x_0|} +$$

$$+ e^{-|x-x_0|}|x - x_0|\left(\widehat{F}(x_0)\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right)\cdot\frac{x - x_0}{|x - x_0|} +$$

$$+ |x - x_0|\tilde{\Phi}_1(x, x_0) + \tilde{\Phi}_2(x, x_0),$$

где $G, \Theta \in C^{\infty}(V)$, $G(x_0) > 0$, $\Theta(x_0) > 0$ при $x_0 \in V$; вектор и матрица $B, \widehat{F} \in C^{\infty}(V)$, а функции $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2 \in C^{\infty}(V \times V)$.

Будем рассматривать операторы A (действующий на функции) и A_τ (действующий в сечениях векторных расслоений) как псевдодифференциальные операторы на многообразии M или Ω, в зависимости от ситуации. Для любой координатной окрестности $U = U_\alpha$, и, соответственно, $V = V_\alpha$, определим ограничение A и A_τ на V по формулам

$$A_V = p_V A q_V : C_0^{\infty}(V) \to C^{\infty}(V),$$

$$\widehat{A}_V = p_V A_\tau q_V : C_0^{\infty}(V) \to C^{\infty}(V),$$

где $q_V : C_0^{\infty}(V) \to C^{\infty}(M)$ - естественное вложение (продолжение нулем вне V), а $p_V : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(V)$ - оператор ограничения, переводящий f в $f|_V$. Здесь не делается различия в обозначениях для операторов q_V, p_V и пространств C_0^{∞}, C^{∞} в "скалярном" и "векторном" случае. Если A_V и $\widehat{A}_V$ превращаются в скалярный и матричный ПДО, то A и A_τ - ПДО на многообразии M [9] или на Ω, если рассматривать ограничение A и A_τ на Ω:

$$A : C_0^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega), \quad A_\tau : C_0^{\infty}(\Omega) \to C^{\infty}(\Omega).$$

Определим действие оператора A на $C_0^{\infty}(\Omega)$. Поскольку требуется знать лишь значения Au в точках $x \in \Omega$ (или $x \in M$), то используем представление для A_V в виде:

$$A_V u = \tag{28}$$

$$= \int\limits_V \frac{a_0(x_0)}{|x - x_0|} e^{-|x-x_0|} u(x)\, dx + \int\limits_V e^{-|x-x_0|} \frac{B(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} u(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_V e^{-|x-x_0|} |x - x_0| \left(\widehat{F}(x_0) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right) \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|} u(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_V \eta(|x - x_0|) |x - x_0| \Psi_1(x_0, x - x_0) u(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_V \eta(|x - x_0|) \Psi_2(x_0, x - x_0) u(x)\, dx;$$

$$a_0(x_0) := \frac{G(x_0)}{\Theta(x_0)} = \sqrt{G(x_0)};$$

$\eta(t) = 1$ при $t \leq R$, $\eta(t) = 0$ при $t \geq 2R$ - бесконечно дифференцируемая "функция-срезка", а R выбрано столь большим, чтобы $\eta(|x - x_0|) \equiv 1$ при $x, x_0 \in V$. Кроме того, в (28) $\Psi_i(x_0, x - x_0) = \Phi_i(x, x_0)$, $x, x_0 \in V$; функции $\Psi_i \in C^\infty(V \times \mathrm{R}^2)$ гладко продолжены на R^2 по второму аргументу. Очевидно, что формулы (24) и (28) порождают один и тот же оператор при $x, x_0 \in V$ и его определение не зависит от выбора функции η.

Каждое слагаемое в (28) есть интегральный оператор типа свертки. Вычислим преобразование Фурье ядер первых трех операторов и обозначим через $b_1(x_0, \xi)$ и $b_2(x_0, \xi)$ преобразования Фурье функций $\eta(|x|)|x|\Psi_1(x_0, x)$ и $\eta(|x|)\Psi_2(x_0, x)$ по аргументу x. Тогда (28) можно переписать в виде

$$A_V u = \tag{29}$$

$$= \int \frac{a_0(x_0)}{\langle\xi\rangle} \widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi - i \int \frac{B(x_0)\cdot\xi}{\langle\xi\rangle^3} \widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi +$$

$$+ \int \frac{tr\widehat{F}(x_0)\langle\xi\rangle^2 - 3(\widehat{F}(x_0)\xi)\cdot\xi}{\langle\xi\rangle^5} \widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi +$$

$$+ \int b_1(x_0, \xi)\widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi + \int b_2(x_0, \xi)\widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi,$$

где $\widehat{u}(\xi)$ - преобразование Фурье функции $u \in C_0^\infty(V)$, а символы $b_1, b_2 \in C^\infty(V \times \mathrm{R}^2)$, как преобразования Фурье финитных функций. Формула (29) определяет ПДО

$$A_V : C_0^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

порядка -1 с положительно однородным (по ξ) главным символом $a_0(x_0)|\xi|^{-1}$.

Очевидно, что последнее слагаемое в (28) (или в (29)) дает оператор с бесконечно гладким ядром, то есть принадлежит классу $L^{-\infty}(V)$ [9, 25]. Для функции $b_1(x_0, \xi)$ имеем следующую оценку

$$\left|\partial_{x_0}^p \partial_\xi^q b_1(x_0, \xi)\right| \leq C_{K,p,q}\langle\xi\rangle^{-2+|q|} \tag{30}$$

для любого компакта $K \subset V$ и любых мультииндексов p, q. Из (30) следует, что $b_1 \in S^{-2}(V)$ и четвертое слагаемое в (29) есть ПДО класса $L^{-2}(V)$ [9, 25].

Таким образом для ПДО A_V верно представление

$$\begin{aligned} A_V u &\equiv A_V^0 u + B_V u = \int a_V(x_0,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{ix_0\cdot\xi}\,d\xi = \\ (31) \qquad &= a_0(x_0)\int \frac{1}{\langle\xi\rangle}\widehat{u}(\xi)e^{ix_0\cdot\xi}\,d\xi + \int b_V(x_0,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{ix_0\cdot\xi}\,d\xi, \end{aligned}$$

$$a_V(x_0,\xi) := a_0(x_0)\langle\xi\rangle^{-1} + b_V(x_0,\xi),$$

где символ $b_V \in S^{-2}(V)$ и $B_V \in L^{-2}(V)$.

Рассмотрим оператор $\tilde{A}$, образованный с помощью "склейки" по формуле

$$\tilde{A}u = \sum_\alpha \psi_\alpha A_\alpha \varphi_\alpha u, \tag{32}$$

или

$$\tilde{A}u \equiv \tilde{A}^0 u + \tilde{B}u = \sum_\alpha \psi_\alpha A_\alpha^0 \varphi_\alpha u + \sum_\alpha \psi_\alpha B_\alpha \varphi_\alpha u, \tag{33}$$

где $A_\alpha \equiv A_V$, $A_\alpha^0 \equiv A_V^0$, $B_\alpha \equiv B_V$ при $V = V_\alpha$; $1 = \sum_\alpha \varphi_\alpha$, а функции ψ_α таковы, что $supp\,\psi_\alpha \subset V_\alpha$, $\psi_\alpha\varphi_\alpha \equiv \varphi_\alpha$. Оператор $\tilde{A} : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

Поскольку ядро оператора A в (24) имеет особенность только при $x = y$, A отличается от $\tilde{A}$ на оператор с бесконечно гладким ядром

$$A = \tilde{A} + \tilde{K}, \quad \tilde{K} \in L^{-\infty}(\Omega). \tag{34}$$

Далее, ПДО с символом $\langle\xi\rangle^{-1}$ осуществляет изоморфизм $H^{-1/2}(M)$ на $H^{1/2}(M)$ [22]. Так как функция $a_0(x_0) > 0$ в любой координатной окрестности, $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$ антидвойственно к $H^{1/2}(\Omega)$, то оператор $\tilde{A}^0$ продолжается по непрерывности до ограниченного, непрерывно обратимого оператора

$$\tilde{A}^0 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega).$$

Тогда, в силу (33) и (34), оператор

$$A : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$$

будет ограниченным фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Для анализа свойств оператора A_τ рассмотрим его ограничение $\widehat{A}_V$ на V. Пусть $e_i(x)$ $(i = 1, 2)$ - базисные орты локальной системы координат на поверхноси U. Действие $\widehat{A}_V$ на $u \in C_0^\infty(V)$ в локальных координатах можно представить в виде

$$\widehat{A}_V u = \sum_{i,j=1}^{2} e_j(x_0)(A_V^{ij} u_i)(x_0),$$

где

$$A_V^{ij} = \int\limits_V \frac{e^{ik\Phi(x,x_0)|x-x_0|}}{\Phi(x,x_0)|x-x_0|} E_{ij}(x,x_0) u_i(x) \sigma(x)\, dx,$$

$$E_{ij}(x,x_0) := e_i(x) \cdot e_j(x_0), \quad u_i(x) := u(x) \cdot e_i(x),$$

причем $E_{ij} \in C^\infty(V \times V)$, $E_{ij}(x_0, x_0) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} - символ Кронекера). Если A_V^{ij} - ПДО на V, то $\widehat{A}_V$ превращается в матричный ПДО, и, следовательно, A_τ - ПДО на многообразии Ω.

Ядра интегральных операторов A_V^{ij} отличаются от ядра интегрального оператора A только сомножителями $E_{ij}(x, x_0)$, поэтому анализ этих операторов полностью аналогичен анализу оператора A. Приведем лишь окончательное представление для $\widehat{A}_V$, соответствующее (31):

$$\widehat{A}_V u \equiv \widehat{A}_V^0 u + \widehat{B}_V u = \int \widehat{a}_V(x_0,\xi)\widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi =$$

$$= a_0(x_0) \int \frac{1}{\langle\xi\rangle} \widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi + \int \widehat{b}_V(x_0,\xi)\widehat{u}(\xi) e^{ix_0\cdot\xi}\, d\xi, \tag{35}$$

где $\widehat{a}_V := a_0(x_0)\langle\xi\rangle^{-1}\widehat{I} + \widehat{b}_V(x_0,\xi)$ ($\widehat{I}$ - единичная матрица); матрицы

$$\widehat{a}_V = \{a_V^{ij}(x_0,\xi)\}_{i,j=1}^2, \quad a_0(x_0)\langle\xi\rangle^{-1}\widehat{I}, \quad \widehat{b}_V = \left\{b_V^{ij}(x_0,\xi)\right\}_{i,j=1}^2$$

- полные символы ПДО $\widehat{A}_V$, $\widehat{A}_V^0$, $\widehat{B}_V$;

$$\widehat{b}_V \in S^{-2}(V), \quad \widehat{B}_V \in L^{-2}(V).$$

Здесь $\widehat{u}(\xi)$ - преобразование Фурье вектор-функции $u = (u^1, u^2) \in C_0^\infty(V)$. Отметим также диагональную структуру матричного символа оператора $\widehat{A}_V^0$.

Определим оператор $\widehat{A}$, образованный с помощью "склейки" по формуле

$$\widehat{A}u = \sum_\alpha \psi_\alpha \widehat{A}_\alpha \varphi_\alpha u, \tag{36}$$

или, в подробной записи,

$$\widehat{A}u \equiv \widehat{A}^0 u + \widehat{B}u = \sum_\alpha \psi_\alpha \widehat{A}_\alpha^0 \varphi_\alpha u + \sum_\alpha \psi_\alpha \widehat{B}_\alpha \varphi_\alpha u, \tag{37}$$

где $\widehat{A}_\alpha = \widehat{A}_V$, $\widehat{A}_\alpha^0 = \widehat{A}_V^0$, $\widehat{B}_\alpha = \widehat{B}_V$ при $V = V_\alpha$.

Оператор A_τ отличается от $\widehat{A}$ на оператор с бесконечно гладким ядром

$$A_\tau = \widehat{A} + \widehat{K}, \quad \widehat{K} \in L^{-\infty}(\Omega) \tag{38}$$

Повторяя рассуждения, приведенные при анализе оператора $A_\perp$ и используя диагональность матричных символов операторов $\widehat{A}_V$ находим, что оператор

$$\widehat{A}^0 : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega)$$

непрерывно обратим. Тогда, в силу (37) и (38)

$$A_\tau : \tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Omega).$$

будет ограниченным фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Перейдем к изучению оператора, определяемого левой частью формулы (23):

$$Lu := grad_\tau\, A\,(div\, u) + k^2\, A_\tau u. \tag{39}$$

Поскольку оператор L будет рассматриваться из W в W', а $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в W, достаточно определить L на $C_0^\infty(\Omega)$ и доказать его ограниченность в указанных пространствах. Тогда действие L на всем W доопределяется по непрерывности.

Квадратичная форма оператора L имеет вид

$$(Lu, u) \equiv \int_\Omega Lu \cdot \overline{u}\, ds = \int_\Omega grad_\tau A(div\, u) \cdot \overline{u}\, ds + k^2 \int_\Omega A_\tau u \cdot \overline{u}\, ds. \tag{40}$$

С помощью формул векторного анализа и теоремы Стокса получаем

(41) $$(Lu, u) = -(A\,(div\,u), div\,u) + k^2\,(A_\tau u, u).$$

В силу определения пространства W, ограниченность формы (41) в W будет доказана, если будет установлена ограниченность квадратичных форм (Au, u) и $(A_\tau u, u)$ на $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})$. В свою очередь, ввиду (34), (38), достаточно доказать ограниченность форм $(\tilde{A}u, u)$ и $(\widehat{A}u, u)$. Докажем ограниченность формы $(\tilde{A}u, u)$; доказательство ограниченности формы $(\widehat{A}u, u)$ совершенно аналогично.

Для формы $(\tilde{A}u, u)$ имеем:

$$(\tilde{A}u, u) = \sum_\alpha (\psi_\alpha A_\alpha \varphi_\alpha u, u) = \sum_\alpha (A_\alpha u_\alpha, v_\alpha),$$

где $v_\alpha := \psi_\alpha u$, $supp\,v_\alpha \subset V_\alpha$, $supp\,u_\alpha \subset V_\alpha$. Остается доказать ограниченность формы $(A_\alpha u_\alpha, v_\alpha)$. Но в локальных координатах оператор A_α есть эллиптический ПДО порядка -1 класса $L^{-1}(V_\alpha)$, который ограничен из $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{V}_\alpha)$ в $H^{1/2}(V_\alpha)$, и, следовательно, форма $(A_\alpha u_\alpha, v_\alpha)$ также ограничена на $\tilde{H}^{-1/2}(\overline{V}_\alpha)$.

Ограниченность квадратичной формы оператора L на W влечет ограниченность полуторалинейной формы (Lu, v) на W и позволяет рассматривать оператор L как ограниченный оператор $L : W \to W'$, где W' - антидвойственное пространство к W [16].

Теперь (23) можно рассматривать как векторное псевдодифференциальное уравнение

(42) $$Lu = f, \quad u \in W, \quad f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W'.$$

При этом равенство в (42) понимается в смысле распределений. Точнее, дадим

Определение 2 *Элемент $u \in W$ будем называть обобщенным решением уравнения (42) (или (23)), если для любых $v \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется вариационное соотношение*

(43) $$-\,(A(div\,u), div\,v) + k^2\,(A_\tau u, v) = (f, v).$$

6 Теоремы о фредгольмовости и разрешимости векторного псевдодифференциального уравнения

Ниже будет доказано, что $L : W \to W'$ - фредгольмов оператор с нулевым индексом. Для этого достаточно представить L в виде суммы непрерывно обратимого и компактного операторов.

Запишем (39) в виде

$$Lu = L_1 u + k^2 L_2 u, \tag{44}$$

где

$$L_1 u := grad_\tau A\,(div\, u), \quad L_2 u := A_\tau u,$$

и рассмотрим действие операторов L_1 и L_2 на подпространствах W_1 и W_2. В силу Предложений 1,5 для оператора L_1 имеет место матричное разложение

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{L}_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где $\widehat{L}_1 : W_2 \to W^2$ - ограниченный оператор. Для оператора L_2:

$$L_2 = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{11} & \widehat{L}_{12} \\ \widehat{L}_{21} & \widehat{L}_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где $\widehat{L}_{ij} : W_i \to W^j$ - ограниченные операторы. Нормы на W_i и W^j индуцированы нормами на W и W'.

Лемма 1 *Оператор $L_0 : W_i \to W^j$ компактен, если существует такое $s \in \mathrm{R}$, что*

$$\|L_0 u\|_{H^s(\Omega)} \le C\,\|u\|_{\tilde{H}^{s-3/2}(\overline{\Omega})}, \quad s > 3/2 - j; \quad i, j = 1, 2. \tag{47}$$

По формулам (33), (34) для оператора $\widehat{L}_1$ имеем представление

$$\widehat{L}_1 u = grad\, \tilde{A}^0\,(div\, u) + grad\,(\tilde{B} + \tilde{K})\,(div\, u) \equiv -L_1^{(1)} u + L_1^{(2)} u. \tag{48}$$

Так как $\tilde{B}$ - ПДО порядка -2, а $\tilde{K}$ - оператор с бесконечно гладким ядром, то для $L_1^{(2)}$ выполняются условия Леммы 1 с $i = j = 2$, $s =$

$1/2$, и оператор $L_1^{(2)}$ компактен. Квадратичная форма оператора $L_1^{(1)}$ коэрцетивна на W_2:

$$(L_1^{(1)}u, u) = (\tilde{A}^0(div\, u), div\, u) \geq C\, \|div\, u\|^2_{-1/2} \geq C_1\, \|u\|^2_W\,, \quad u \in W_2.$$

Отсюда следует [16], что $L_1^{(1)}$ непрерывно обратим. Таким образом $\widehat{L}_1$ - фредгольмов и $ind\, \widehat{L}_1 = 0$.

Далее, поскольку L_2 - ПДО порядка -1, то для операторов $\widehat{L}_{ji}, ij \neq 1$ (то есть для $\widehat{L}_{12}, \widehat{L}_{21}, \widehat{L}_{22}$) выполняются условия Леммы 1 с $s = i - 1/2$; эти операторы также компактны. Рассмотрим оператор $\widehat{L}_{11}$. Имеем [61, 62]

$$\widehat{L}_{11} = L_{11}^{(1)} + L_{11}^{(2)}, \tag{49}$$

где

$$L_{11}^{(1)} := p(1 - \tilde{P})q\widehat{A}^0(1 - P), \quad L_{11}^{(2)} := p(1 - \tilde{P})q(\widehat{B} + \widehat{K})(1 - P).$$

Оператор $\widehat{B}+\widehat{K}$ - ПДО порядка -2, поэтому для $L_{11}^{(2)}$ выполняются условия Леммы 1 с $i = j = 1, s = 3/2$, и, следовательно, $L_{11}^{(2)}$ тоже компактен. Квадратичная форма оператора $L_{11}^{(1)}$ коэрцетивна на W_1

$$(L_{11}^{(1)}u, u) = (\widehat{A}^0 u, u) \geq C\, \|u\|^2_{-1/2} = C\, \|u\|^2_W\,, \quad u \in W_1,$$

поэтому [16] $L_{11}^{(1)}$ непрерывно обратим. Тем самым установлена фредгольмовость оператора $\widehat{L}_{11}$, и $ind\, \widehat{L}_{11} = 0$.

Объединяя полученные результаты с учетом формул (44) - (49) находим, что имеет место матричное представление для L в виде

$$L = L^1 + L^2 \equiv \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & -L_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 L_{11}^{(2)} & k^2 \widehat{L}_{12} \\ k^2 \widehat{L}_{21} & L_1^{(2)} + k^2 \widehat{L}_{22} \end{pmatrix}, \tag{50}$$

где оператор L^2 компактен, а оператор L^1 непрерывно обратим при $k \neq 0$, поскольку операторы $L_{11}^{(1)}$, $L_1^{(1)}$ непрерывно обратимы. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 3 *Оператор $L = L(k) : W \to W'$ является фредгольмовым при $k \neq 0$ и $ind\, L(k) = 0$.*

Замечание 2 *При $k = 0$ оператор $L(0)$ фредгольмовым не будет, так как $W_1 \subset ker\, L^1$, $dim\, W_1 = \infty$.*

Замечание 3 *Выше было установлено, что $L_{11}^{(1)}$ и $L_1^{(1)}$ равномерно положительные операторы. Матричное разложение оператора L^1 в (50) показывает, что "главная часть" оператора L (оператор L^1) не будет положительно определенным или отрицательно определенным оператором при $Re\, k \neq 0$, однако L^1 коэрцетивен при $Im\, k \neq 0$:*

$$|(L^1 u, u)| \geq C||u||_W^2, \quad u \in W.$$

При $Im\, k = 0$, $k \neq 0$ оператор L^1, очевидно, коэрцетивным не будет.

На основе Теорем 2 и 3 при $Im\, k \geq 0$, $k \neq 0$ можно получить более сильный результат об однозначной разрешимости уравнения (23) (или (42)). Для этого нам потребуются утверждения о гладкости решений уравнения (42) в Ω при $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Пусть $f = f^1 + f^2$, $f^1 \in W^1$, $f^2 \in W^2$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Запишем уравнение (42) с учетом матричного представления (50) в виде системы из двух уравнений ($k \neq 0$):

$$L_{11}^{(1)} u_1 = -L_{11}^{(2)} u_1 - \widehat{L}_{12} u_2 + k^{-2} f^1, \tag{51}$$

$$L_1^{(1)} u_2 = L_1^{(2)} u_2 + k^2 \widehat{L}_{21} u_1 + k^2 \widehat{L}_{22} u_2 - f^2, \tag{52}$$

где $u_1 \in W_1$, $u_2 \in W_2$, $u = u_1 + u_2$. Операторы $\widehat{L}_{ij} : W_i \to W^j$ ($ij \neq 1$) являются ПДО порядка -1 класса $L^{-1}(\Omega)$, $L_{11}^{(2)} : W_1 \to W^1$ - ПДО порядка -2 класса $L^{-2}(\Omega)$, $L_1^{(2)} : W_2 \to W^2$ - ПДО порядка 0 класса $L^0(\Omega)$. Обозначим правую часть в (51) и (52) через g_*^1 и g_*^2. Тогда будем иметь

$$L_{11}^{(1)} u_1 = g_*^1, \quad g_*^1 \in H^{3/2}(\Omega), \tag{53}$$

$$L_1^{(1)} u_2 = g_*^2, \quad g_*^2 \in H^{1/2}(\Omega). \tag{54}$$

Оператор $L_{11}^{(1)} : W_1 \to W^1$ есть эллиптический классический ПДО порядка -1 класса $L_{\text{кл}}^{-1}(\Omega)$ с главным символом $\widehat{a}_0(x, \xi) =$

$a_0(x)|\xi|^{-1}\widehat{I}$. Главный символ $\widehat{a}_0 = \widehat{a}_0(x,\xi)$ оператора при любом ненулевом элементе $(x,\xi) \in T^*M$ кокасательного расслоения T^*M задает отображение слоев

$$\widehat{a}_0(x,\xi) : W_x \to W'_x,$$

так что в целом получается отображение расслоений $\widehat{a}_0 : \pi_0^* W \to \pi_0^* W'$, где $\pi_0 : T^*M \setminus O \to M$ - каноническая проекция кокасательного расслоения без нулевого сечения на базу M; $\pi_0^* W$, $\pi_0^* W'$ - индуцированные расслоения со слоями W_x, W'_x над каждой точкой $(x,\xi) \in T^*M \setminus O$.

Рассмотрим оператор $L_1^{(1)} : W_2 \to W^2$, $L_1^{(1)} u := grad\, \tilde{A}^0\, (div\, u)$. Этот оператор представляет собой композицию операторов div, $\tilde{A}^0$, $grad$, два из которых дифференциальные, а оператор $\tilde{A}^0$ - скалярный ПДО с главным символом $a_0(x)|\xi|^{-1}$, который является корректно определенной функцией на кокасательном расслоении T^*M. Согласно теореме о композиции классических ПДО [9, 25], главный символ $\widehat{\sigma}_0$ оператора $L_1^{(1)}$ находится как произведение главных символов этих операторов, что дает

$$\widehat{\sigma}_0(x,\xi) = -\frac{1}{a_0(x)|\xi|} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Отметим, что формально символ (55) является вырожденным при всех $\xi \in \mathrm{R}^2$, так как определитель матрицы в (55) тождественно равен нулю.

Однако оператор $L_1^{(1)}$ действует на подпространстве W_2, то есть на элементы u такие, что $rot_\nu u = 0$. Оператор $L_1^{(1)}$ действует на подпространствах $W_2 \to W^2$ как эллиптический классический ПДО порядка 1 класса $L^1_{\text{кл}}(\Omega)$ с главным символом $-a_0^{-1}(x)|\xi|\widehat{I}$. Таким образом

$$\begin{aligned} L_{11}^{(1)} &= a_0\Delta^{-1/2} & &: W_1 \to W^1, \\ L_1^{(1)} &= -a_0^{-1}\Delta^{1/2} & &: W_2 \to W^2, \end{aligned} \tag{56}$$

понимая под $\Delta^{\pm 1/2}$ классические ПДО с главными символами $|\xi|^{\mp 1}$.

Утверждение 1 *Если $u \in W$ решение уравнения (23) с гладкой правой частью $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Теорема 4 *При $Im\,k \geq 0$, $k \neq 0$ оператор $L(k) : W \to W'$ непрерывно обратим.*

Следствие 1 *При $Im\,k \geq 0$, $k \neq 0$ обобщенное решение $u \in W$ уравнения (23) (или(42)) существует и единственно при любой правой части $f \in W'$ (в частности, при $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$).*

Подведем итог исследованию разрешимости задачи дифракции на системе ограниченных экранов Ω произвольной формы.

Теорема 5 *Задача (3)-(8) при $Im\,k \geq 0$, $k \neq 0$ имеет единственное решение при любых E^0, H^0, удовлетворяющих условию (9).*

Следствие 2 *Любое решение задачи (3)-(8) при $Im\,k \geq 0$, $k \neq 0$ представимо в виде векторного потенциала (14)-(16) с функцией u, удовлетворяющей условиям (17), (18).*

7 Гладкость обобщенных решений. Порядок сингулярности решений в окрестности угловых точек

Изучение гладкости обобщенных решений в окрестности границы (включая граничные точки) является значительно более сложным, особенно в окрестности угловых точек границы. Для ПДО $\Delta^{\pm 1/2}$ точные результаты были получены недавно в [52]. Ниже, используя сведение задачи к уравнениям (51), (52), мы применим результаты работы [52] для получения оценок порядка сингулярности решения в окрестности угловых точек. При этом рассмотрим два случая: поведение решения в окрестности гладкой части границы Γ и поведение решения в окрестности угловой точки.

Перейдем к анализу гладкости решения уравнения $Lu = f$, $u \in W$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Имеем [61, 62] наилучший результат в невесовых классах Соболева:

$$u_1 \in \tilde{H}^{-\varepsilon}(\overline{\Omega}), \quad u_2 \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\overline{\Omega}), \quad \varepsilon > 0$$

- произвольно малое число. Отсюда следует, что существует след

$$u_2|_\Gamma \in H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma),$$

причем

$$u_2|_\Gamma = 0,$$

так как продолжение u_2 нулем вне Ω является непрерывным в норме $\|\cdot\|_{1-\varepsilon}$.

Если граница Γ - гладкая, то [61, 62] получаем, что функция u_1 в окрестности границы имеет сингулярность вида

$$u_1 \sim \rho^{-1/2}(x) g^1(t), \quad g^1 \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma), \tag{57}$$

где $\rho(x) = dist(x, \Gamma) = |x - t|$, t – натуральный параметр на Γ. Далее находим, что u_2 в окрестности Γ имеет особенность

$$u_2 \sim \rho^{1/2}(x) g^2(t) + \rho(x) q^2(t), \quad g^2 \in H^{3-\varepsilon}(\Gamma), \; q^2 \in H^{7/2-\varepsilon}(\Gamma). \tag{58}$$

Если граница имеет угловые точки, то поведение u_1, u_2 в окрестности любого гладкого куска Γ' границы Γ (отстоящего на положительное расстояние от угловых точек) имеет тот же вид (57), (58), где надо заменить Γ на Γ'. Этот результат получается, если "срезать" u в окрестности Γ' (см.[52]).

Далее, пусть $n = n(t)$ - внешняя нормаль к границе в точке $t \in \Gamma'$ в касательной плоскости. В окрестности гладкого куска Γ' из (58) находим, что

$$u_2 \cdot n|_{\Gamma'} = 0. \tag{59}$$

Имеет место [61, 62]

Утверждение 2 *Если Γ - гладкая кривая, то $u \cdot n|_\Gamma = 0$ как элемент пространства $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma)$. Если Γ' - гладкий кусок Γ, отстоящий на положительное расстояние от угловых точек, то $u \cdot n|_{\Gamma'} = 0$ как элемент пространства $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma')$.*

Перейдем к анализу сингулярности u в окрестности угловой точки P. Пусть $\alpha = \alpha(P)$ - внутренний (по отношению к Ω) угол, под которым пересекаются две гладкие дуги границы в точке P, $0 < \alpha(P) < 2\pi$, $\alpha(P) \neq \pi$. Поскольку $u_2|_\Gamma = 0$, то сингулярность может быть только у функции u_1. Отобразим диффеоморфно окрестность точки P на δ-окрестность начала координат так, чтобы дуги, образующие угол, перешли в прямолинейные лучи $\varphi = 0, \varphi = \alpha$ в полярных координатах (r, φ) в этой δ-окрестности. Как следует из [52], сингулярность в окрестности точки P будет иметь вид

$$u_1 \sim r^{-\tau} \varphi^{-1/2} (\alpha - \varphi)^{-1/2}, \quad r \to 0, \tag{60}$$

где v - гладкая и ограниченная функция на $(0, \alpha)$.

Показатель сингулярности τ в (60) определяется величиной угла α, однако τ вычисляется лишь приближенно численными методами, например, как решение трансцендентного уравнения (4.1) в [52]. Известно два предельных результата для τ [52]:

$$\lim_{\alpha \to 2\pi - 0} \tau(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \to +0} \tau(\alpha) = 1,$$

причем $\tau(\alpha) \sim 1 - (\ln \frac{1}{\alpha})^{-1}$ при $\alpha \to +0$.

В заключение параграфа 7 приведем таблицу приближенных значений для τ, вычисленных в [52]. Из представленного выше анализа ясно, что показатель сингулярности для u в окрестности угловой точки совпадает с $\tau(\alpha)$.

α/π	0.	0.0500	0.1161	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000
$\tau(\alpha)$	1.0000	0.8705	0.8350	0.8317	0.7820	0.7384	0.6956
α/π	0.6250	0.7500	0.8750	0.9000	0.9500	1.0000	1.1250
$\tau(\alpha)$	0.6517	0.6057	0.5561	0.5456	0.5243	0.5022	0.4448
α/π	1.2500	1.3750	1.5000	1.6250	1.7500	1.8750	2.0000
$\tau(\alpha)$	0.3799	0.3073	0.2277	0.1444	0.0702	0.0281	0.

8 Принцип предельного поглощения

Полученные в предыдущих параграфах утверждения о свойствах задачи дифракции на Ω позволяют установить ряд важных результатов, касающихся зависимости решений задачи от параметра k. Прежде всего это относится к предельному переходу в задаче дифракции при $k \to k_0$, где k - комплексное число, $Im\, k > 0$, а k_0 - вещественное, $Im\, k_0 = 0$, $k_0 \neq 0$. Если для получения решения возможен предельный переход при $k \to k_0$, то говорят, что справедлив "принцип предельного поглощения".

Принцип предельного поглощения может быть сформулирован как в форме предельного перехода для решения $u = u(k)$ уравнения на Ω (23), так и в виде предельного перехода для рассеянного поля $E = E(k)$, $H = H(k)$. В любом случае предполагается, что падающее поле $E^0 = E^0(k)$, $H^0 = H^0(k)$ непрерывно зависит от k (что обычно выполняется на практике). Достаточно считать, что такая зависимость имеет место только в окрестности рассматриваемой точки k_0, причем для k с положительной мнимой частью: $Im\, k > 0$, $k \to k_0$. Ниже будут приведены точные формулировки условия на падающее поле.

Основой для доказательства принципа предельного поглощения является Теорема 4 и аналитическая зависимость оператор-функции $L(k)$ от параметра $k \in \mathbb{C}$. Под аналитичностью (голоморфностью) понимается дифференцируемость по норме оператор-функции в каждой точке области аналитичности.

Утверждение 3 *Оператор-функция $L(k) : W \to W'$ является аналитической (голоморфной) при всех $k \in \mathbb{C}$.*

Утверждение 4 *Оператор-функция $L^{-1}(k) : W' \to W$ является аналитической (голоморфной) в $\mathbb{C}_+$ (при $Im\, k > 0$) и непрерывной в $\overline{\mathbb{C}}_+ \setminus 0$ (при $Im\, k \geq 0$, $k \neq 0$).*

Теорема 6 *Пусть $k_0 \neq 0$, $Im\, k_0 = 0$, $Im\, k > 0$. Тогда если $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ при $k \to k_0$, то $u(k) \xrightarrow{W} u(k_0)$, $k \to k_0$, где $u(k)$ и $u(k_0)$ решения уравнения (23) при k и k_0, соответственно.*

Теорема 7 *Пусть $k_0 \neq 0$, $Im\, k_0 = 0$, $Im\, k > 0$. Тогда если $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ при $k \to k_0$, то $E(k) \to E(k_0)$, $H(k) \to H(k_0)$ в $L^2_{loc}(\mathrm{R}^3)$ при $k \to k_0$, где $E(k)$, $H(k)$ и $E(k_0)$, $H(k_0)$ решения задачи (3)-(8) при k и k_0, соответственно.*

Замечание 4 *Условие $f(k) \xrightarrow{W'} f(k_0)$ будет выполнено, если функции $f(\mathrm{x}; k)$ и $\partial f(\mathrm{x}; k)/\partial \mathrm{x}_j$ непрерывно зависят от параметра k в полуокрестности точки k_0, точнее при $|k - k_0| < \delta$, $Im\, k \geq 0$. Это следует из того, что норма в $C^1(\overline{\Omega})$ сильнее нормы в $W'(\Omega)$,*

$$\|f\|_{W'} \leq C_1 \|f\|_{1/2} \leq C_2 \|f\|_{c^1},$$

согласно теоремам вложения [35] и Предложению 4.

Таким образом в Теоремах 6,7 установлен принцип предельного поглощения для задачи дифракции на Ω. С физической точки зрения этот принцип означает непрерывную зависимость решения задачи от проводимости среды σ (≥ 0), поэтому для построения решения в среде "без поглощения" ($\sigma = 0$) иногда искусственно вводят малый параметр $\sigma > 0$ ("поглощение"), а затем переходят к пределу при $\sigma \to 0$ или получают приближенное решение.

9 Метод Галеркина

Рассмотренная выше теория позволяет построить и обосновать новый численный метод Галеркина для решения уравнения $Lu = f$. Рассмотрим n-мерное подпространство $V_n \subset W$ и будем аппроксимировать u элементами $u_n \in V_n$. Согласно методу Галеркина u_n находятся как решения уравнений

$$(Lu_n, v) = (f, v) \quad \text{для любых} \quad v \in V_n. \tag{61}$$

Основная трудность при решении уравнения заключается в том, что оператор L не является эллиптическим, поэтому неприменимы известные результаты о сходимости проекционных методов [63]. Однако мы имеем возможность построить специальный метод Галеркина с выбором безроторных и бездивергентных базисных и тестовых функций и доказать его сходимость, используя структуру главной части псевдодифференциального оператора L [33].

Теорема 8 *Пусть n-мерные подпространства*

$$V_n^1 \subset W_1 \quad \text{и} \quad V_n^2 \subset W_2$$

обладают свойством аппроксимации в W_1 и W_2 соответственно. Тогда метод Галеркина (61) на подпространствах $V_n := V_n^1 + V_n^2$ сходится.

Очевидно, что рассмотренная выше теория может быть применена для расчета токов также на поверхности замкнутого экрана (идеально проводящего тела). Результаты расчетов дифракции плоской волны при $k = 1$ на сфере радиуса 1 представлены ниже. Сравнение нашего метода с методом Рао-Уилтона-Глиссона (RWG) [54] даны в следующей таблице:

	Число базисных функций	Относительная ошибка
Метод RWG	72	0.151
Метод RWG	162	0.108
Метод RWG	288	0.100
Метод RWG	450	0.098
Наш метод	144	0.100
Наш метод	324	0.048
Наш метод	576	0.028

Литература

[1] Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. – М.: Наука, 1972.

[2] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988.

[3] Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987.

[4] Вычислительные методы в электродинамике /Под ред. Р.Миттры. – М.: Мир, 1977.

[5] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.

[6] Гринберг Г.А., Пименов Ю.В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах // Ж. теор. физ. – 1957. – Т.27, Вып.10. – С.2326–2339.

[7] Гринберг Г.А. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих плоских экранах, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. I и II //Ж. теор. физ. Сер.Б. – 1958. – Т.28, Вып.3. – С.542–568.

[8] Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987.

[9] Егоров Ю.В., Шубин М.А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. В кн.: Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т.31. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. М., 1988. – С.5–125.

[10] Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1992.

[11] Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. – М.: Радио и связь, 1982.

[12] Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction // 1896. – Math. Ann. – V.47. – P.317–374.

[13] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М.: Высшая школа, 1991.

[14] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Интегральные уравнения для задач дифракции волн на экранах // Радиотехн. и электроника. – 1994. – Т.39, № 1. – С.23–31.

[15] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

[16] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.

[17] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

[18] Купрадзе В.Д. Основные задачи математической теории дифракции. М.: Гостехиздат, 1935.

[19] Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1951.

[20] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[21] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.

[22] Мищенко А.С. Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984.

[23] Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987.

[24] Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.

[25] Ремпель Ш., Шульце Б.-В. Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.

[26] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.:Мир, 1984.

[27] Свешников А.Г. Принцип излучения. //Докл. АН СССР. 1950, т.73, № 5, с.917–920.

[28] Смирнов Ю.Г. О фредгольмовости задачи дифракции на плоском ограниченном идеально проводящем экране. //Докл. АН СССР, 1991, т.319, № 1, с.147–149.

[29] Смирнов Ю.Г. Исследование разрешимости векторных электродинамических задач на незамкнутых поверхностях. Дис. докт. физ.-мат. наук. М.: 1995.

[30] Смирнов Ю.Г. Разрешимость интегродифференциальных уравнений в задаче дифракции на идеально проводящем плоском экране. //Радиотехн. и электроника. 1992, т.37, № 1, с.32–35.

[31] Смирнов Ю.Г. О фредгольмовости системы псевдодифференциальных уравнений в задаче дифракции на ограниченном экране. //Дифференциальные уравнения. т.28, № 1, 1992, с.136–143.

[32] Смирнов Ю.Г. О разрешимости векторных задач дифракции в областях, связанных через отверстие в экране. //Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1993, т.33, № 9, с.1427–1440.

[33] Vartanov A., Smirnov Yu.G. Pseudodifferential Equations Method for Solving of Electromagnetic Wave Diffraction on Conducting Screens // Proc. of "International Conference on Transparent Optical Networks". Kielce. Poland. June 9-11. 1999. - P.239–241.

[34] Смирнов Ю.Г. О разрешимости векторных интегродифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитного поля на экранах произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1994. - Т.34, № 10. – С.1461–1475.

[35] Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1985.

[36] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980.

[37] Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. – М.: Сов. радио, 1962.

[38] Фельд Я.Н. Основы теории щелевых антенн. – М.: Сов. радио, 1948.

[39] Фельд Я.Н. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых металлических поверхностях // Радиотехн. и электроника. – 1975. – Т.20, № 1. – С.28–38.

[40] Хенл Х., Мауэ А., Вестфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964.

[41] Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978.

[42] Computational Electromagnetics: Frequency-Domain Method of Moments. / Ed. by E.K.Miller, L. Medgyesi-Mitschand, E.H. Newman. – New York: IEEE Press, 1992.

[43] Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // 1988. – SIAM J. Math. Anal. – Vol.19, № 3, May 1988. – P.613–626.

[44] Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods. – New York: Macmillian Co., 1968.

[45] Maue A.W. Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation // Zeitschrift für Physik. – 1949. – Vol.126. – P.601–618.

[46] Miller E.K., Poggio A.J. Moment – Method Techniques in Electromagnetics from an Applications Viewpoint // Electromagnetic Scattering / Edited by P.L.E. Uslenghi. – New York: Academic Press, 1978. – P.315–358.

[47] Mittra R., ed. Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics. – New York: Springer Verlag, 1975.

[48] Moore J., Pizer R. Moment Methods in Electromagnetics: Techniques and Applications. - New York: John Wiley & Sons, 1984.

[49] Morgenrother K., Werner P. On the Instability of Resonances in Parallelplane Waveguides // Mathematical Methods in the Applied Sciences. - 1989. - Vol.11. - P.279–315.

[50] Müller Cl. Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. - New York: Springer-Verlag, 1969.

[51] Päivärinta L., Rempel S. A deconvolution problem with Kernel $1/|x|$ on the plane //Appl. Anal. - 1987. - Vol.26. - P.105–128.

[52] Päivärinta L., Rempel S. Corner singularities of solutions to $\Delta^{\pm 1/2}u = f$ in two dimensions // Asymptotic Analysis. - 1992. - 5. - P.429–460.

[53] Ramm F.G. Scattering by Obstacles. - Dordrecht. D. Reidel Publ. Comp., 1986.

[54] Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape // IEEE Trans. Antennas Propagation. - 1982. - Vol.AP-30, № 3. - P.409–418.

[55] Schuman H.K., Warren D.E. Aperture Coupling in Bodies of Revolution // IEEE Trans. Antennas Propagation. - 1978. - Vol.AP-26,№ 6. - P.778–783.

[56] Smirnov Yu.G. Pseudodifferential Equations for Electrodynamic Screen Problem in R^3 // Mathematical Methods in Electromagnetic theory. 4th International Seminar. 15–24 September, 1991. Alushta. - P.171–182.

[57] Smirnov Yu.G. The Behavior of Electromagnetic Field Near a Corner of Flat Bounded Screen // In "Day of Diffraction–92". International Seminar. Abstracts. - Saint Petersburg. 1992. - P.31.

[58] Stephan E.P. Boundary Integral Equations for Screen Problem in R^3 // Integral Equations and Operator Theory. - 1987. - Vol.10. - P.236–257.

[59] Stephan E., Wendland W.L. An Augmented Galerkin Procedure for the Boundary Integral Method Applied to Two - dimensional Screen and Crack Problems // Applicable Analysis. - 1984. - Vol.18. - P.105–128.

[60] Wang J.H.H. Generalized Moment Methods in Electromagnetics. - New York: John Wiley & Sons, 1991.

[61] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. - М.: ИПРЖР, 1996.

[62] Ilyinsky A.S., Smirnov Yu.G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. - VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998.

[63] Kress R. Linear Integral Equations. - Applied Mathematical sciences. Vol.82. - Springer–Verlag, New York, 1989.